

104

Roll No. : .....

2023 (Annual)

## APPLIED MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घंटे]

[अधिकतम अंक : 70

Time allowed : 3 Hours]

[Maximum Marks : 70

नोट : (i) प्रथम प्रश्न अनिवार्य है, शेष में से किन्हीं पाँच के उत्तर दीजिए।

Note : Question No. 1 is compulsory, answer any FIVE questions from the remaining.

(ii) प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को क्रमवार एक साथ हल कीजिए।

Solve all parts of a question consecutively together.

(iii) प्रत्येक प्रश्न को नये पृष्ठ से प्रारम्भ कीजिए।

Start each question on fresh page.

(iv) दोनों भाषाओं में अन्तर होने की स्थिति में अंग्रेजी अनुवाद ही मान्य है।

Only English version is valid in case of difference in both the languages.

1. (i) वृत्त  $x^2 + y^2 = 12x$  के केन्द्र व त्रिज्या ज्ञात कीजिये।Find the centre and radius of the circle  $x^2 + y^2 = 12x$ .(ii) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2e^y$  को हल कीजिये।Solve the differential equation  $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2e^y$ .(iii) सम्मिश्र संख्या  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$  का मापांक एवं कोणांक ज्ञात कीजिये।Find the modulus and argument of the complex number  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .(iv)  $e^{3\log_e x}$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन कीजिये।Differentiate  $e^{3\log_e x}$  with respect to  $x$ .(v) फलन  $\tan^2 x$  का  $x$  के सापेक्ष समाकलन कीजिये।Integrate the function  $\tan^2 x$  with respect to  $x$ .

(2×5)



2. (i) सिद्ध कीजिये  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

Prove that  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$ . (6)

(ii) परवलय  $y^2 - 2y + 2x = 0$  के शीर्ष, अक्ष, नाभि तथा नाभिलम्ब ज्ञात कीजिये।

Find the vertex, axis, focus and latus rectum of the parabola  $y^2 - 2y + 2x = 0$ . (6)

3. (i) यदि  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a, & x \leq 1 \\ bx + 2, & x > 1 \end{cases}$  सर्वत्र अवकलनीय है, तो  $a$  और  $b$  के मान ज्ञात कीजिये।

If  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a, & x \leq 1 \\ bx + 2, & x > 1 \end{cases}$  is differentiable at everywhere, then find the value

of  $a$  and  $b$ .

(ii) मैट्रिक्स  $A$  का प्रतिलोम मैट्रिक्स ज्ञात कीजिये :

Find the inverse of a matrix  $A$  :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

4. (i) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु  $(-2, -3)$  से होकर जाती है तथा सरल रेखा  $2x + 3y + 5 = 0$  के समान्तर है।

Find the equation of a line passing through  $(-2, -3)$  and parallel to the line  $2x + 3y + 5 = 0$ . (6)

(ii) सिद्ध कीजिये

Prove that

$$\begin{bmatrix} a + b + 2c & a & b \\ c & b + c + 2a & b \\ c & a & c + a + 2b \end{bmatrix} = 2(a + b + c)^3$$
 (6)

5. (i) यदि  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots \infty}}$  तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिये।

If  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots \infty}}$  then find the value of  $\frac{dy}{dx}$ . (6)

(ii) किसी गैस के दाब  $P$  तथा आयतन  $V$  के संबंध समीकरण  $PV^{1.4} = k$  में  $k$  अचर है। यदि दाब में 0.7 प्रतिशत की वृद्धि हो, तो सिद्ध कीजिये कि आयतन में 0.5 प्रतिशत की कमी होगी।

The pressure  $P$  and the volume  $V$  of gas are connected by the relation  $PV^{1.4} = k$  where  $k$  is a constant. If there be an increase of 0.7 percent in the pressure, show that there is decrease of 0.5 percent in the volume. (6)

6. निम्न समाकलन हल कीजिये :

Solve the following integrals :

$$(i) \int e^x \frac{(x+1)}{(x+2)^2} dx \quad (6)$$

$$(ii) \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx \quad (6)$$

7. निम्न अवकल समीकरण हल कीजिये :

Solve the following differential equations :

$$(i) x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x \quad (6)$$

$$(ii) \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad (6)$$

8. (i) मान ज्ञात कीजिये :

Find the value :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x} \quad (6)$$

(ii) सिद्ध कीजिये कि निम्न चार बिन्दु समतलीय हैं :

Prove that the following four points are coplanar :

$$4\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}; 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}; 3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} \text{ and } 5\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}. \quad (6)$$

Solve the following integrals :

(i)  $\int \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} dx$

(ii)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Solve the following differential equations :

(i)  $x \frac{dy}{dx} + 2y = x \log x$

(ii)  $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = x^2 - y^2$

Find the value :

(i)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$

Prove that the following four points are concyclic :

(i)  $(-1, 8), (1, 12), (4, 6), (8, 4)$  and  $(8, 1)$