

2017

APPLIED MATHEMATICS

निर्धारित समय : तीन घंटे]

[अधिकतम अंक : 70

Time allowed : Three Hours]

[Maximum Marks : 70

नोट : (i) प्रथम प्रश्न अनिवार्य है, शेष में से किन्हीं पाँच के उत्तर दीजिये।

Note : Question No. 1 is compulsory, answer any FIVE questions from the remaining.

(ii) प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को क्रमवार एक साथ हल कीजिये।
Solve all parts of a question consecutively together.

(iii) प्रत्येक प्रश्न को नये पृष्ठ से प्रारम्भ कीजिये।
Start each question on fresh page.

(iv) दोनों भाषाओं में अन्तर होने की स्थिति में अंग्रेजी अनुवाद ही मान्य है।
Only English version is valid in case of difference in both the languages.

1. (i) वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ के केन्द्र व त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

Find the centre and radius of the circle $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

(ii) हल कीजिये : $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$

Solve : $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$

(iii) समिश्र संख्या $1 - \sqrt{3} i$ का मापांक एवं कोणांक ज्ञात कीजिये।

Find the modulus and argument of the complex number $1 - \sqrt{3} i$.

(iv) 8 व्यक्ति एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं ?

In how many ways 8 persons seated around a round table ?

(v) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

(2×5)

2. (i) सिद्ध कीजिये कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में मध्य पद $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n} \cdot 2^n x^n$ है।

Prove that the middle term in the expansion of

$$(1+x)^{2n} \text{ is } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n} \cdot 2^n x^n.$$

- (ii) सिद्ध कीजिये : $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{16}$

Prove that : $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{16}$ (6+6)

3. (i) यदि फलन $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ k-2x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$x = 1$ पर सतत हो तो k का मान ज्ञात कीजिये।

if the function $f(x)$ is continuous at $x = 1$, then find the value of k

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ k-2x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- (ii) क्रमर नियम से निम्न रेखिक समीकरण निकाय को हल कीजिये :

Solve the following system of linear equation by using Cramer's Rule :

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$2x + 4y + z = 7$$

$$3x + 2y + 9z = 14$$

(6+6)

4. (i) सिद्ध कीजिये :

Prove that :

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

- (ii) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो बिन्दु $(3, 4)$ से होकर जाती है तथा रेखा

$$2x + 3y + 7 = 0 \text{ पर लम्बवत् है।}$$

Find the equation of a line passing through $(3, 4)$ and perpendicular to the line

$$2x + 3y + 7 = 0.$$

(6+6)

5. (i) यदि $x^y = e^{x-y}$ तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1 + \log_e x)^2}$$

If $x^y = e^{x-y}$ then prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1 + \log_e x)^2}$$

(6)

- (ii) सिद्ध कीजिये कि दी गई तिरछी (तिर्यक) ऊँचाई और अधिकतम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ है।

Show that the semi-vertical angle of a cone of maximum volume and given slant height is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$. (6)

6. निम्न समाकलन हल कीजिये :

Solve the following integrals :

(i) $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(ii) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$

(6+6)

7. निम्न अवकल समीकरण हल कीजिये :

Solve the following differential equations :

(i) $x \log_e x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log_e x$

(ii) $\frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^{-2x}$

(6+6)

8. (i) मान ज्ञात कीजिये :

Find the value :

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x) dx$$

- (ii) बिन्दु $(0, 1, 2)$ से होकर जाने वाले बल $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ का बिन्दु $(1, -2, 0)$ के सापेक्ष आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

A force $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ is passing through point $(0, 1, 2)$. Find the moment of force w.r.t. the point $(1, -2, 0)$ (6+6)

